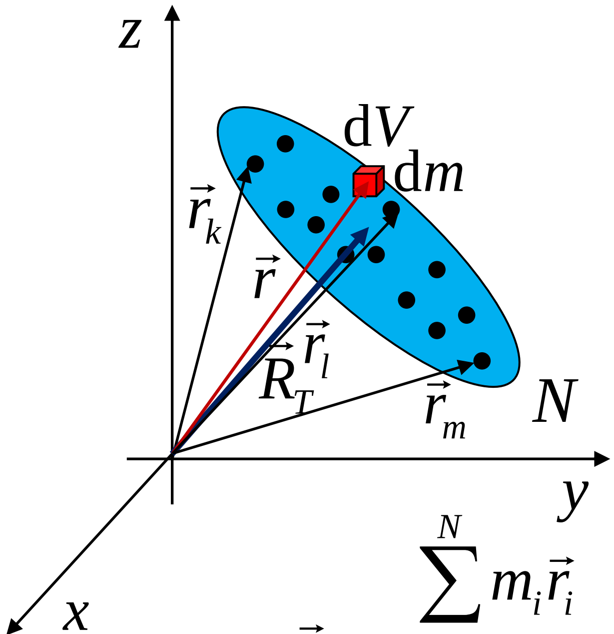
Opakování - Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- **Volná soustava hmotných bodů**. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné 3*N* souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má **3*N* stupňů volnosti.**
- **Tuhá soustava hmotných bodů**. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

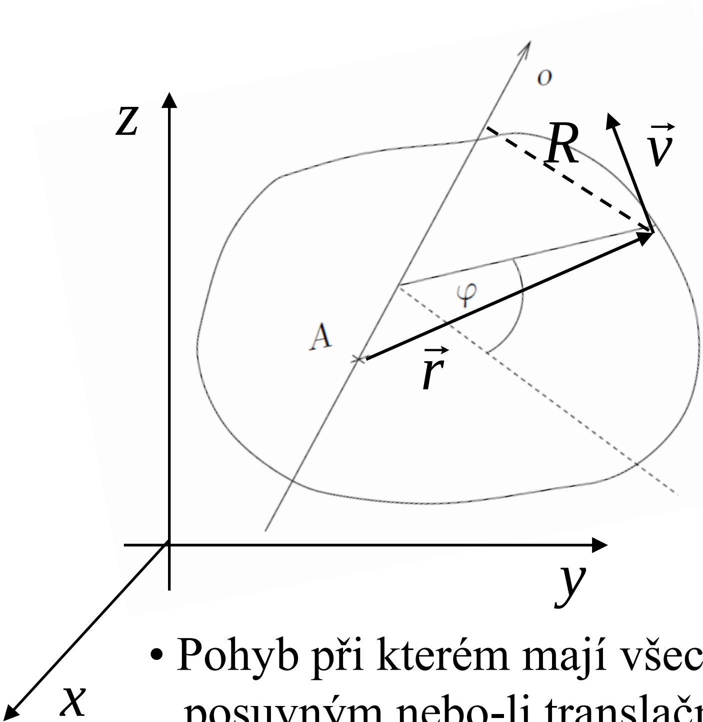
$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = konst., \quad \rho = \rho\left(\vec{r}\right) = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

$$\vec{R}_T \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \equiv \frac{\int_V \vec{r}\rho \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho \mathrm{d}V, \quad kde \quad \int_V \rho \mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}m = M$$

- Udáním poloh tří hmotných bodů v tuhé soustavě, které neleží na jedné přímce je jednoznačně určena poloha všech bodů soustavy. Tři polohové vektory mají devět souřadnic, ale musí splňovat tyto tři rovnice:

$$d_{kl} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_l\right|, \quad d_{km} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_m\right|, \quad d_{lm} = \left|\vec{r}_l - \vec{r}_m\right| \quad \Rightarrow \quad 6\ stup.volnosti$$

Opakování- Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- 2) Obecnějším pohybem tuhého tělesa je pohyb, při kterém pouze jeden jeho bod *A* zachovává v tělese i prostoru stálou polohu. Tento pohyb nazýváme **rotací tuhého tělesa kolem pevného bodu**.
- Zavedeme vektor úhlové rychlosti, jehož směr je shodný s osou otáčení, která se může měnit s časem, pak podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa dána vzorcem :

$$\vec{v} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

- Pohyb při kterém mají všechny body tuhého tělesa stejný vektor rychlosti nazýváme posuvným nebo-li translačním pohybem: $\vec{v}_T = \vec{v}_T(t)$

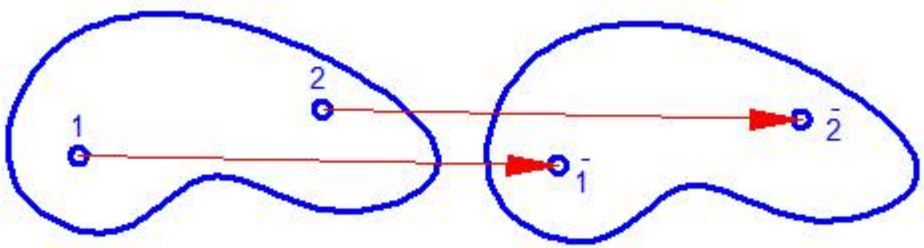
- Podle **Chaslesovy věty** lze libovolný pohyb tuhého tělesa složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu. Rychlost libovolného bodu tuhého tělesa lze určit složením rychlosti jednoho libovolného bodu *A* tělesa a rychlosti dané otáčením kolem tohoto bodu:

$$v(t) = \vec{v}_T(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Opakování- Otáčení a posunutí

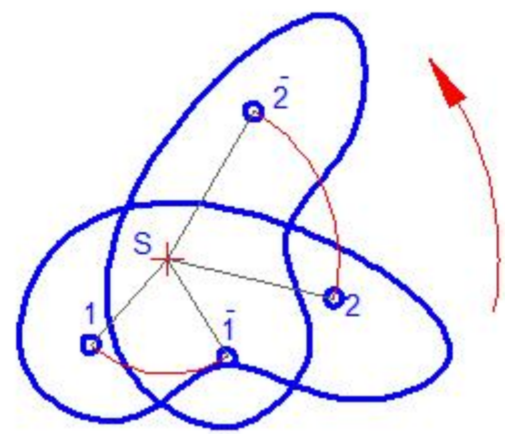
posunutí (translace)

• všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích



otočení (rotace)

• všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



Opakování- Pohyb tuhého tělesa

• Chaslesova věta (teorém)

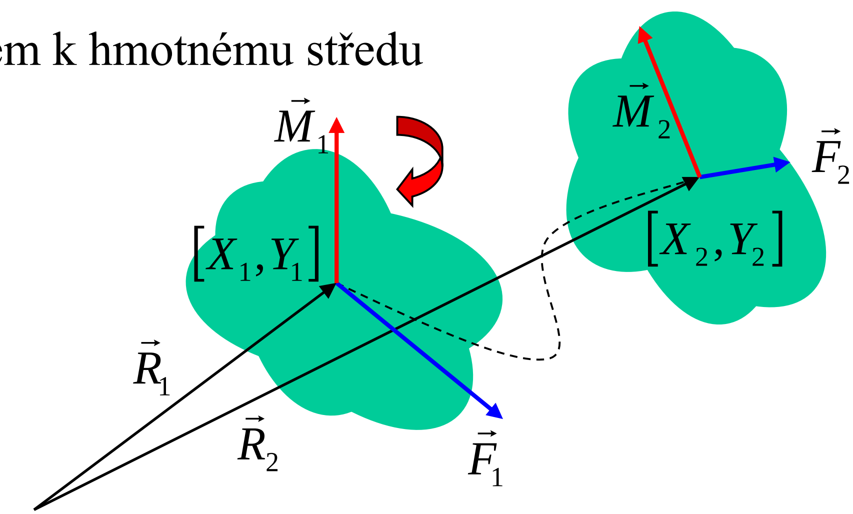
Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu

• hmotný střed se pohybuje jako hmotný bod v němž se soustředěna celá hmotnost tělesa a na který působí výslednice všech vnějších sil

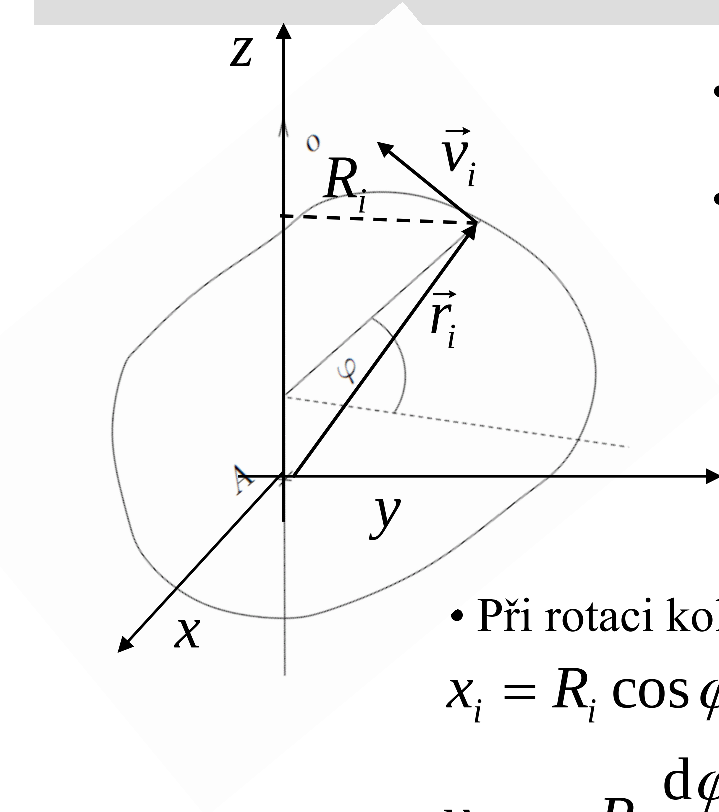
$$\vec{F}^{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_{T} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}^{2}\vec{R}}{\mathrm{d}t^{2}}$$ (1. impulsová věta)

• časová změna momentu hybnosti soustavy vzhledem k hmotnému středu je rovna výslednému momentu vnějších sil

$$\vec{M}^{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$ (2. impulsová věta)



Opakování - Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Zvolíme soustavu souřadnou tak, že osa *z* bude totožná s osou otáčení *o*.
- Pohybovou rovnici získáme úpravou třetí složky 2. věty impulzové:

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$B_z = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right]_z = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i m_i v_{iy} - y_i m_i v_{ix}\right)$$

- Při rotaci kolem pevné osy se i-tý hmotný bod pohybuje po kružnici a tedy:

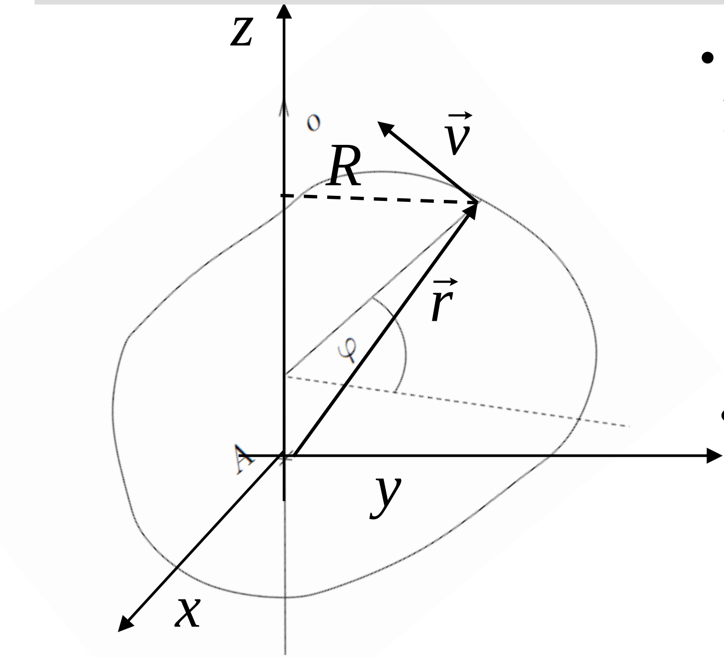
$$x_i = R_i \cos\varphi_i \qquad y_i = R_i \sin\varphi_i$$

$$v_{ix} = -R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \sin\varphi_i \qquad v_{iy} = R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \cos\varphi_i$$

- U tuhé soustavy hmotných bodů jsou úhlové rychlosti všech bodů stejné:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega \quad \Rightarrow \quad B_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \omega J$$

Opakování - Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Jelikož jsou pro tuhou soustavu hmotných bodů vzdálenosti hmotných bodů od osy otáčení konstantní, můžeme definovat **moment setrvačnosti**:

$$J \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V$$

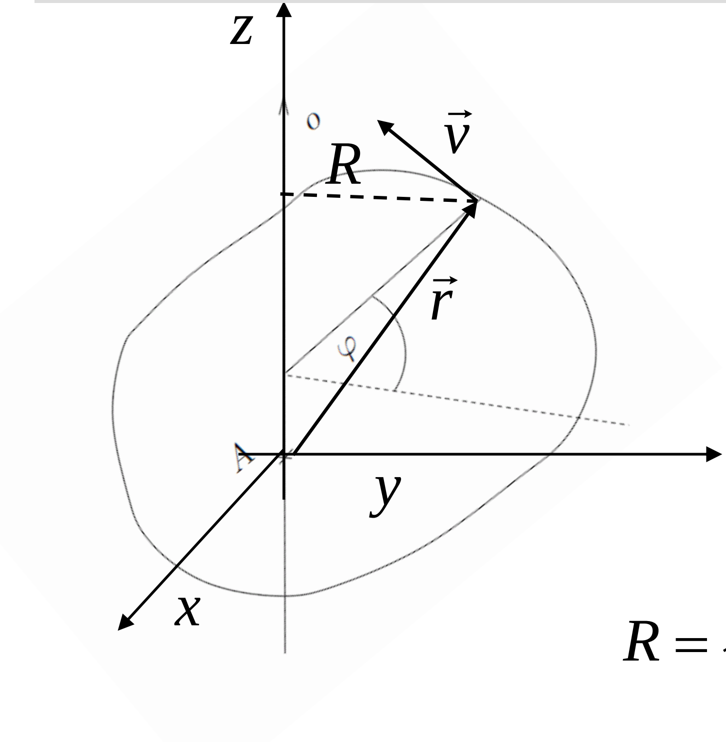
- Třetí složku pohybové rovnice můžeme tedy psát ve tvaru :

$$\frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_z = M_0$$

- Kde složku výsledného momentu vnějších sil do směru osy otáčení nazýváme **výsledným momentem vnějších sil vůči ose a** kde obecně:

$$M_0 = \vec{v}\cdot\vec{M} = v_x M_x + v_y M_y + v_z M_z$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Jelikož jsou pro tuhou soustavu hmotných bodů vzdálenosti hmotných bodů od osy otáčení konstantní, můžeme definovat **moment setrvačnosti**:

$$J \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \int_M R^2 \mathrm{d}m \equiv \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V \equiv \iiint_V R^2 \rho \mathrm{d}V$$

- Zvolíme li osu z shodnou s osou otáčení tuhého tělesa:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow J = \int_V \left(x^2 + y^2\right) \rho \mathrm{d}V = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \rho \mathrm{d}V$$

- Moment setrvačnosti lze také vyjádřit jako součin hmotnosti tělesa a čtverce jisté střední vzdálenosti R, v níž by musela být soustředěna hmotnost tělesa M, aby moment setrvačnosti byl roven momentu setrvačnosti tělesa. Vzdálenost R se nazývá **poloměr setrvačnosti (gyrační poloměr) tělesa** pro danou osu:

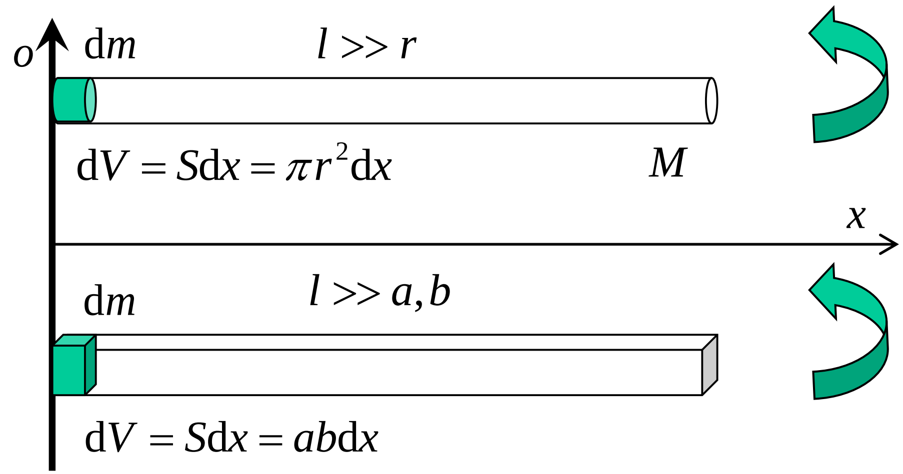
$$J = MR_g^2 \Rightarrow R_g = \sqrt{\frac{J}{M}}$$

Moment setrvačnosti - tyče

- moment setrvačnosti homogenní tyče délky l
- pro osu otáčení na kraji:

$$J=\int_M x^2 dm=\int_V \rho x^2 dV \Rightarrow J=\rho S\int_0^l x^2 dx$$

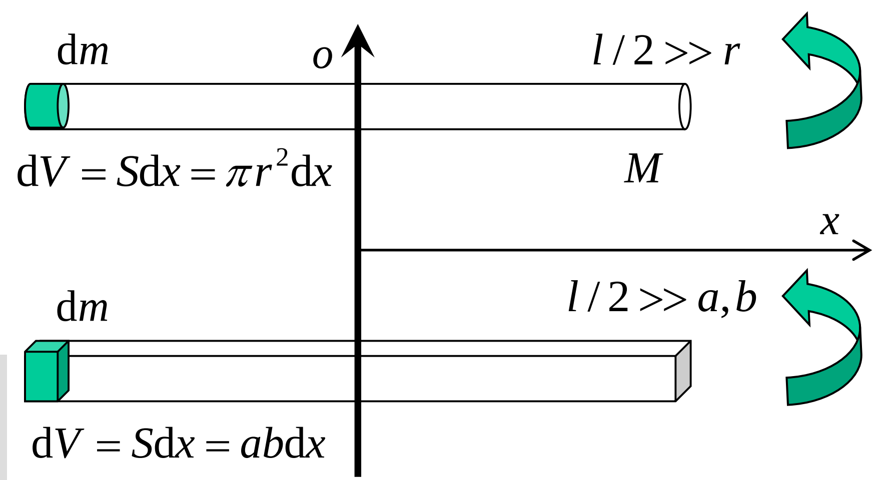
$$J=\rho S\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\rho S\left[\frac{l^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{3}Ml^2$$



- moment setrvačnosti homogenní tyče délky l
- pro osu otáčení uprostřed tyče:

$$J=\int_V \rho x^2 dV \Rightarrow J=\rho S\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

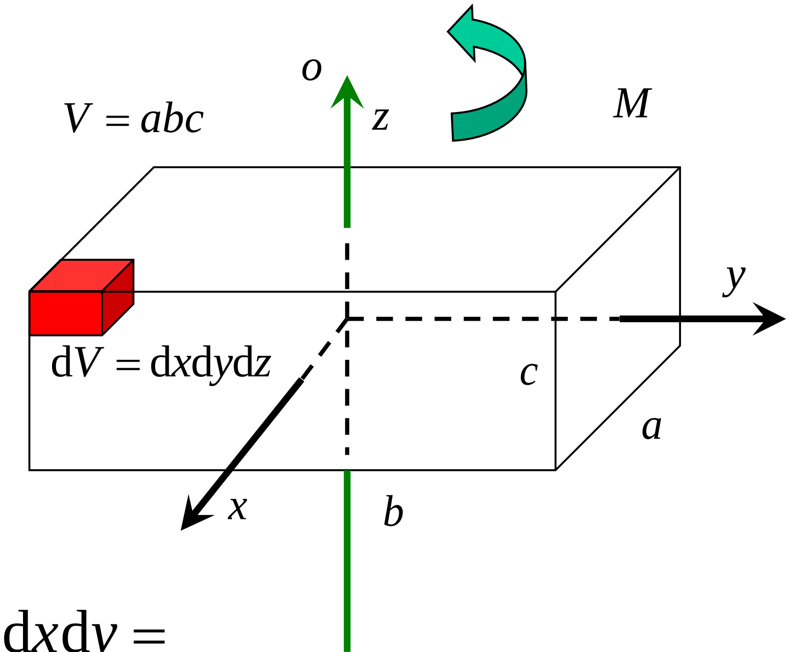
$$J=\rho S\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\rho S\left[\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}+\frac{(\frac{l}{2})^3}{3}\right]=\frac{1}{12}Ml^2$$



Moment setrvačnosti - kvádru

• moment setrvačnosti homogenního kvádru

• pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy z:



$$J_z = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) dV =$$

$$= \rho \int_V x^2 dV + \rho \int_V y^2 dV$$

$$\rho \int_V x^2 dV = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\rho \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= cb\rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x = cb\rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = cb\rho \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \rho V \frac{a^2}{12}$$

$$\rho \int_V y^2 dV = \rho V \frac{b^2}{12}$$

$$J_z = \rho V \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

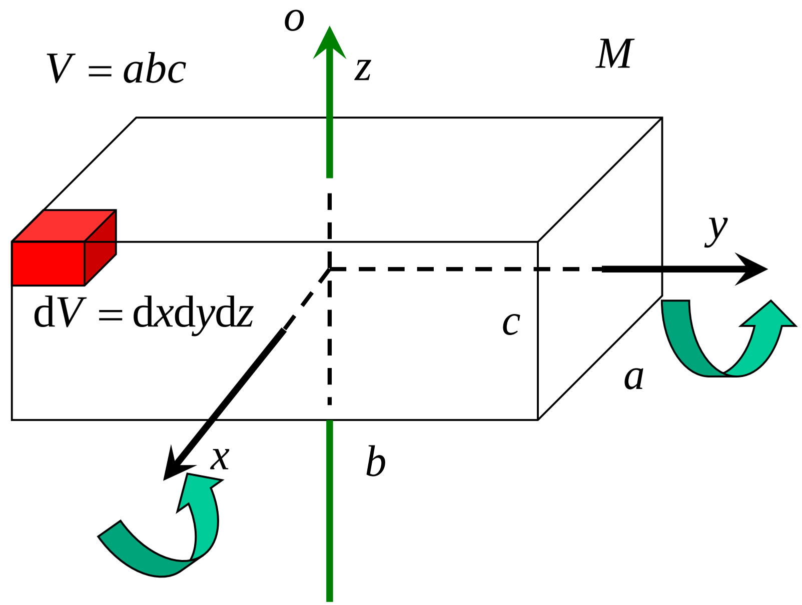
Moment setrvačnosti - kvádru

- moment setrvačnosti homogenního kvádru
- pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy *y*:

$$J_y = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + z^2\right) dV =$$

$$= \rho \int_V x^2 dV + \rho \int_V z^2 dV$$

$$\rho \int_V x^2 dV = \rho V \frac{a^2}{12} \qquad \rho \int_V z^2 dV = \rho V \frac{c^2}{12}$$



$$J_y = \rho V \frac{a^2 + c^2}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

$$J_x = \rho V \frac{b^2 + c^2}{12} = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

Opakování - obloukový element křivky 3D

kartézská soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

cylidrická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

sférická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\right)^{1/2}$

$\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}q_i$ $\quad \mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}s_1)^2 + (\mathrm{d}s_2)^2 + (\mathrm{d}s_3)^2\right)^{1/2} = \left((h_1\mathrm{d}q_1)^2 + (h_2\mathrm{d}q_2)^2 + (h_3\mathrm{d}q_3)^2\right)^{1/2}$

h_i – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r\sin\vartheta$	r	ϑ	φ

Objemový element: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = h_1\mathrm{d}q_1 h_2\mathrm{d}q_2 h_3\mathrm{d}q_3$

Sférická soustava souřadnic - objemový element**:** $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

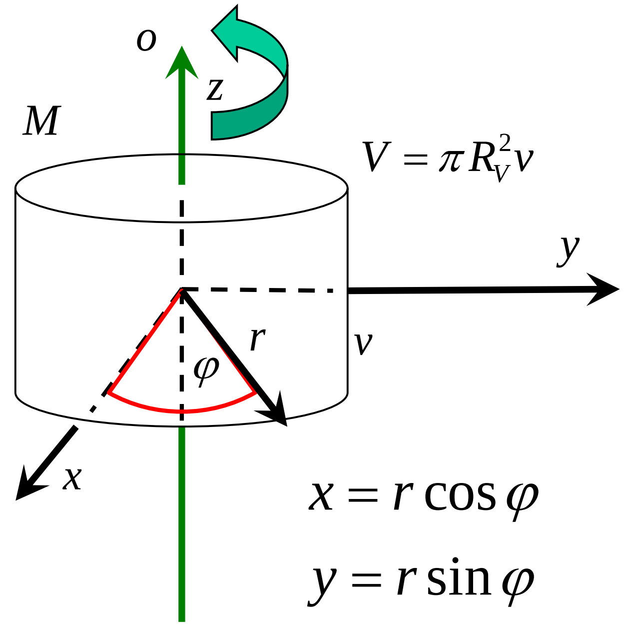
Cylidrická soustava souřadnic - objemový element: $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

Kartézká soustava souřadnic - objemový element: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Moment setrvačnosti - válce

- moment setrvačnosti homogenního válce

- pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy z:



$$J_z = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$J_z = \rho \int_{-v/2}^{v/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} r^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = v\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi v\rho \int_0^{R_V} r^3 \mathrm{d}r = 2\pi v\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_V} = \frac{V\rho R_V^2}{2} = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$\boxed{J_z = \frac{MR_V^2}{2}}$$

Moment setrvačnosti - válce

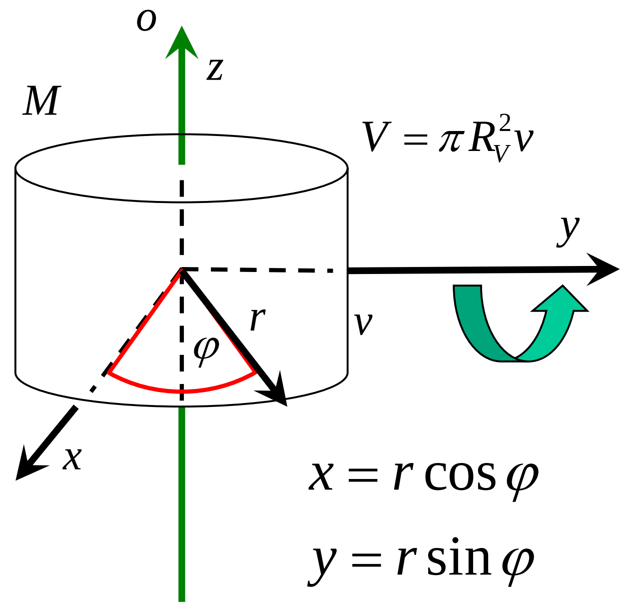
• moment setrvačnosti homogenního válce

• pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy *y* nebo *x*:

$$J_y = \rho \int_V \left(z^2 + x^2 \right) \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V = r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

$$x^2 = r^2 \cos^2 \varphi$$



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$J_y = \rho \int_{-v/2}^{v/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} \left(z^2 + r^2 \cos^2 \varphi \right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z =$$

$$= \rho \int_{-v/2}^{v/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} z^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z + \rho \int_{-v/2}^{v/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} r^3 \cos^2 \varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

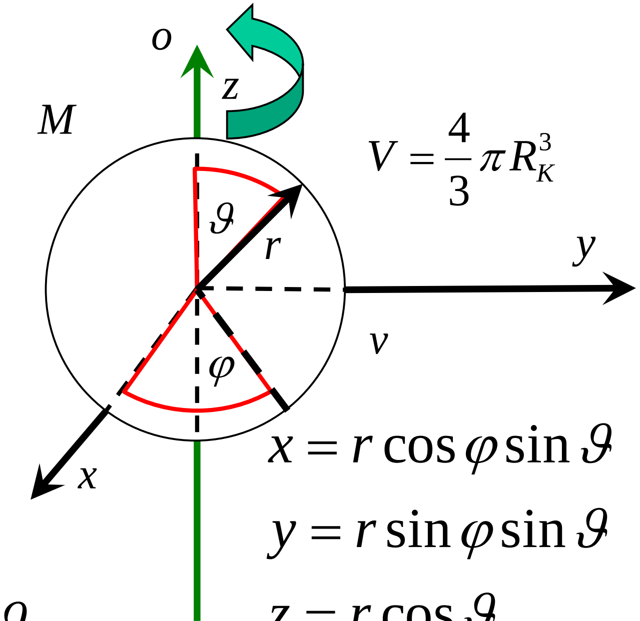
$$J_y = \rho 2\pi \frac{R_V^2}{2} \int_{-v/2}^{v/2} z^2 \mathrm{d}z + \rho v \frac{R_V^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \mathrm{d}\varphi = \rho \pi R_V^2 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-v/2}^{v/2} + \rho v \frac{R_V^4}{4} \pi$$

$$J_y = J_x = \rho \pi R_V^2 \frac{v^3}{12} + \rho \pi v \frac{R_V^4}{4} = M \left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4} \right)$$

Moment setrvačnosti - koule

• moment setrvačnosti koule

• pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy z:



$$V = \frac{4}{3}\pi R_K^3$$

$$J_z = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \qquad x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$$

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$z = r\cos\vartheta$$

$$J_z = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\rho \int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 2\pi\rho \frac{R_K^5}{5}\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{5}\pi\rho R_K^5 \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi\rho R_K^5 \left[\frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi\rho R_K^3 \,\frac{2}{5} R_K^2$$

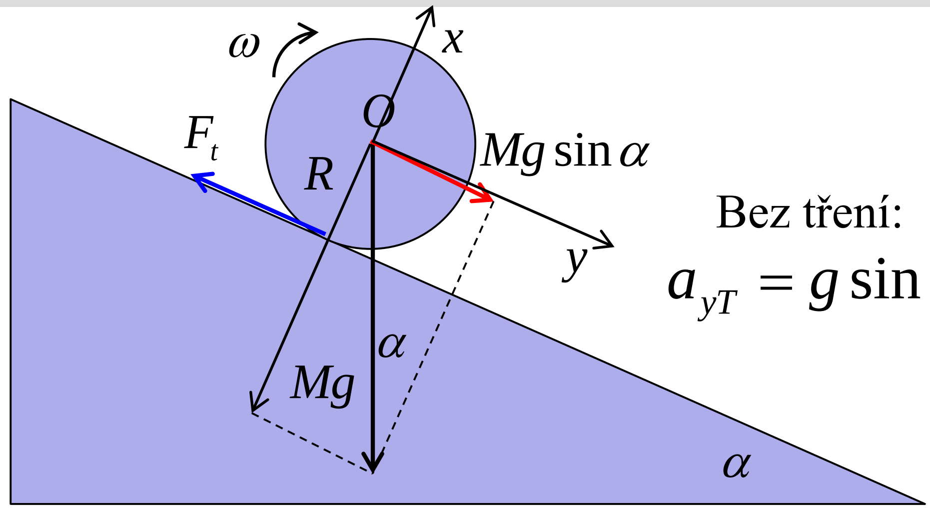
$$J_z = J_x = J_z = \frac{2}{5} M R_K^2$$

Valení po nakloněné rovině

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_T \qquad \text{(1. impulsová věta)}$$

$$M\vec{a}_T = \vec{F}_g + \vec{F}_t$$

$$Ma_{yT} = Mg\sin\alpha - F_t$$



Bez tření:

$$a_{yT} = g\sin\alpha$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulsová věta)}$$

$$M_z = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)_z = xF_y - yF_x = RF_t$$

rychlost hmotného středu $v_{yT} = \dfrac{s}{T} = \omega R$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{J_z}{R}\frac{\mathrm{d}v_{yT}}{\mathrm{d}t} = \frac{J_z}{R}a_{yT}$$

$$M_z = \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} \Rightarrow F_t = \frac{J_z}{R^2}a_{yT}$$

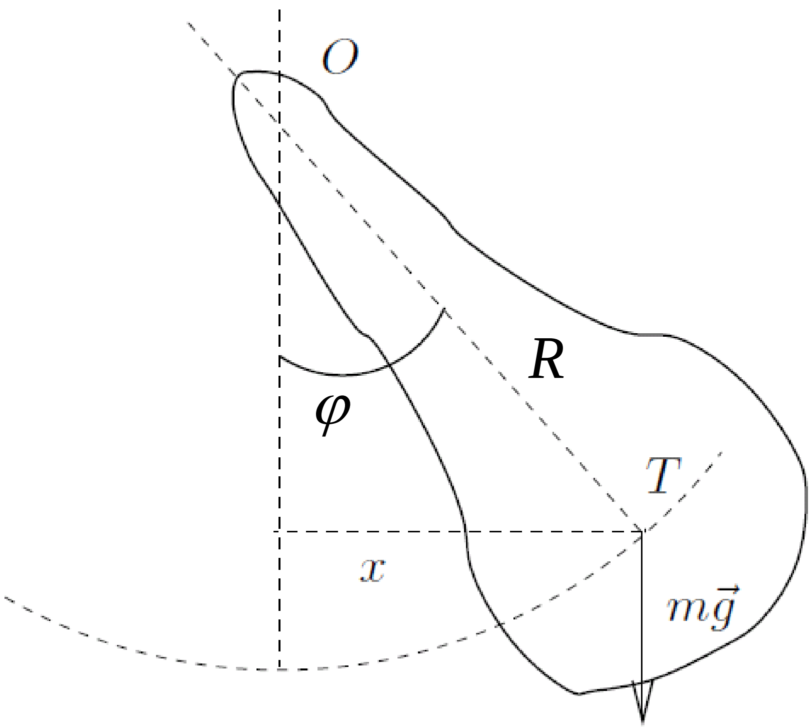
$$Ma_{yT} = Mg\sin\alpha - \frac{J_z}{R^2}a_{yT}$$

$$\boxed{a_{yT} = \frac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{J_z}{MR^2}}}$$

homogenní válec: $J_z = \dfrac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a_{yT} = \dfrac{g\sin\alpha}{1+1/2} = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$

homogenní koule: $J_z = \dfrac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a_{yT} = \dfrac{g\sin\alpha}{1+2/5} = \dfrac{5}{7}g\sin\alpha$

Fyzické kyvadlo



$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$ (2. impulsová věta)

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M$$

$$M = -mgR\sin\varphi$$ Pro malé φ: $\sin\varphi \cong \varphi$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgR\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgR}{J}\varphi = 0$$

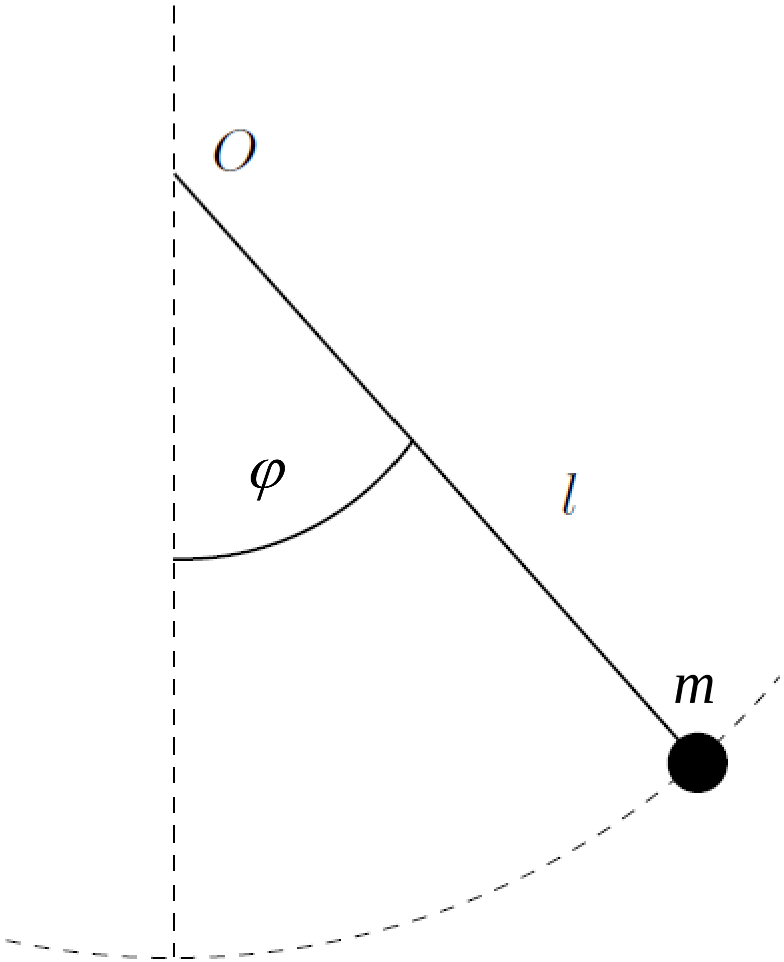
$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \alpha), \quad kde \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgR}{J}}$$

Zavedeme redukovanou délku kyvadla:

$$l_R = \frac{J}{mR} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l_R}{g}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}}$$

Matematické kyvadlo



$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulsová věta)}$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M$$

$$M = -mgl\sin\varphi \qquad \text{Pro malé } \varphi\text{:} \quad \sin\varphi \cong \varphi$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$$

$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \alpha), \quad kde \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

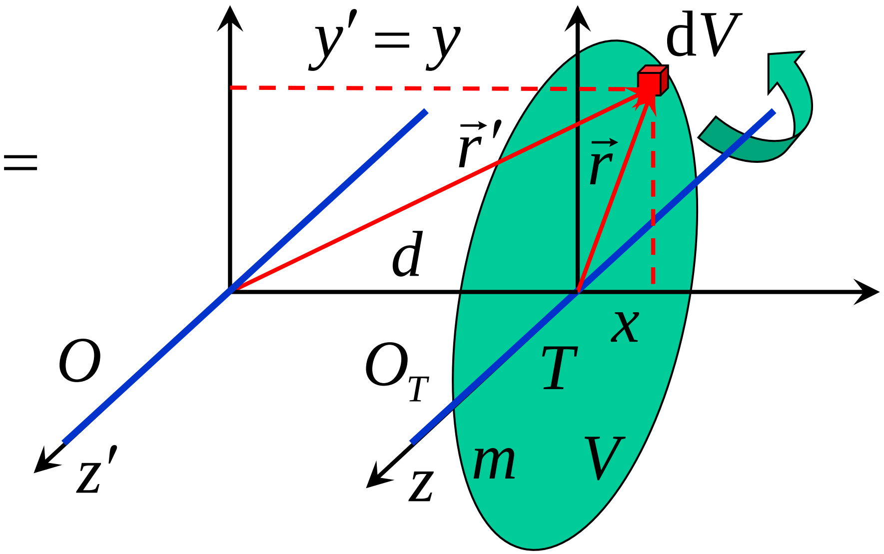
$$J = ml^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Steinerova věta (rovnoběžné osy)

• Moment setrvačnosti kolem osy $O\,//\,O_T\,//\,z$

$$J = \int_V r'^2 \rho \mathrm{d}V = \int_V \left((x+d)^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \int_V \left(x^2 + 2xd + d^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V$$



Jelikož jsme zvolili soustavu souřadnou v hmotném středu (těžišti) tělesa, potom:

$$2d\int_V x\rho \mathrm{d}V = 0 \qquad J = \int_V \left(x^2 + d^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V = d^2\int_V \rho \mathrm{d}V + \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V$$

$$\boxed{J = md^2 + J_0}$$

moment setrvačnosti hmotného středu vzhledem k ose O

moment setrvačnosti vůči rovnoběžné ose otáčení O_S procházející hmotným středem